MATHEMATIK UND MORAL

Günter Hanisch, Wien

1. Einleitung

Beim Abfassen dieser Arbeit habe ich herumgefragt, wie Mathematik und Moral zusammenhängen. Als Antwort erhielt ich immer ein Kopfschütteln oder ein "gar nicht", da ja $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ weder sittlich wertvoll noch verwerflich ist.
Ich werde daher die Frage anders stellen, da die Mathematik an sich ja wertfrei ist, wie auch ein Hanfstrick wertfrei ist; nicht wertfrei ist aber das, wozu der Mensch die Mathematik benützt und was sie aus ihm macht.

2. Was macht die Mathematik aus dem Menschen

Oder "Was soll sie machen?". Eng damit zusammen hängt auch die Frage "Ist es moralisch Mathematik zu unterrichten?" Öfter als mir lieb ist, bereitet ja meinen Schülern bzw. Schülerinnen der Mathematikunterricht (MU) nicht nur Freude sondern eher das Gegenteil, auch wenn ich mich noch so bemühe.
Eine Antwort darauf gibt mir der Lehrplan.
Betrachten wir etwa die Bildungs- und Lehraufgabe des MU einer AHS in der Oberstufe:

Bildungs- und Lehraufgabe:

Anleitung zu selbständiger und produktiver geistiger Tätigkeit.
Ausbildung des exakten und kritischen Denkens.
Förderung der Fähigkeit zu logischem Schließen.
Förderung des exakten sprachlichen Ausdrucks.
Förderung der Fähigkeit zum Lösen von mathematischen Problemen.
Schulung des Abstraktionsvermögens.
Schulung in wichtigen mathematischen Beweisverfahren.
Ausbildung des geometrischen Anschauungsvermögens.
Einführung in den Gebrauch der mathematischen Fachsprache und Fachsymbolik.
Schulung der Geläufigkeit in den wichtigsten Rechenverfahren.
Vermittlung von Einsichten in die kulturgeschichtliche, sozial- und wirtschaftspolitische sowie wissenschaftstheoretische Bedeutung der Mathematik.
Entwicklung der Fähigkeit zur mathematischen Behandlung von Problemen aus den Naturwissenschaften, den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften und aus anderen Bereichen.
Vermittlung grundlegender Kenntnisse aus Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik.

BGBl.Nr. 114/1978 (Lehrplan ab 1978/79 aufsteigend in Kraft gesetzt), 470/1982.

Auffallend daran ist, das etwa die vier ersten Aufgaben nichts mit Fachmathematik zu tun haben. Das, was sich der Laie unter MU vorstellt, kommt erst als letztes!
Obige Lehrziele waren und sind auch heute nicht unumstritten.
Ich selbst bejahe sie und bemühe mich daher meinen Unterricht so zu führen, daß diese Lehrziele verwirklicht werden.
In der Hoffnung, daß mir dies auch gelingt, halte ich es für moralisch gut, wenn ich den Schülern Mathematik beibringe.
Werden die Schüler aber dadurch moralisch besser? Ist jemand, der exakt denkt, logisch schließt, abstrahieren kann und grundlegende Kenntnisse aus Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik mitbringt, moralisch gut? War Eichmann daher moralisch gut, der doch großartig Transportprobleme gelöst hat.

Andererseits ist etwa Platon der Überzeugung, daß die Geometrie (für die Griechen war das die Mathematik) auch etwas beiträgt "zur Bewerkstelligung der leichteren Anschauung der Idee des Guten" (PLATON, o.S.). Denn "für Platon war das 'Sollen' durch die Idee des Guten bestimmt, und die gehörte zum gleichen Reich der Ideen wie die Objekte der Mathematik. Er erwartete deshalb, daß der mit den mathematischen Ideen befaßte Mensch auch einen Zugang zur Idee des Guten finden würde" (MESCHKOWSKI, 1979). Eine unerwartete Bestätigung dafür fanden PIAGET, KOHLBERG, LOEVINGER u.a. Diese Psychologen befaßten sich mit der Entwicklung des moralischen Bewußtseins. So erzählte KOHLBERG seinen Versuchspersonen Konfliktgeschichten, für die es keine eindeutigen und allgemein anerkannten "richtigen" Antworten gibt, und forderte seine Versuchspersonen zu Urteilen, Stellungnahmen und Begründungen auf. Eine derartige Problemsituation ist z.B.:

Sollte ein Angehöriger der zivilen Verteidigung seinen Posten verlassen, um seiner Familie zu helfen, die vielleicht bei einer Katastrophe zu Schaden gekommen ist, oder sollte er dort ausharren, wo er ist, und anderen helfen?

Was, meinen Sie, sollte er tun und warum? KOHLBERG analysierte die Antworten und fand drei Strukturniveaus des moralischen Urteilens, die sich in jeweils zwei Stufen untergliedern ließen und sich als Entwicklungsabfolge bestätigten. Das Auswertungsschema von KOHLBERG ist sehr komplex und die Beschreibung seiner Stufen sehr differenziert. Die folgende Kurzbeschreibung der Stufen kann davon nur einen knappen Eindruck geben.

Stufen des moralischen Urteilens nach KOHLBERG (nach HOFFMANN, 1970).

A) Vormoralisches Niveau: Orientierung an äußerlichen Normen und Machtmitteln.

1. Orientierung am angerichteten Schaden; Gehorsam gegenüber Mächtigen und Orientierung an Strafvermeidung ist "richtig".
2. Naiver Hedonismus. Richtig ist, was mir nützt und meinen Wünschen (und evtl. denen anderer) entspricht. Wie-du-mir-so-ich-dir-Haltung.

B) Rollenkonformität und Pflichterfüllung: Orientierung an der Erwartung und der guten Meinung anderer (bes. persönlicher Vorbilder).

3. "Braves-Kind"-Mentalität. Orientierung an Lob und Zustimmung. Wunsch, zu gefallen, zu helfen und gute soziale Kontakte zu erhalten. Ein guter Mensch ist einer mit guten Eigenschaften.
4. Achtung von Autorität und Aufrechterhaltung der sozialen Ordnung. Orientierung an Pflichterfüllung. Allgemeine Verhaltensregeln und legitimes Recht haben Vorrang vor persönlichen, wenn auch verständlichen Motiven. Tugendhaftigkeit wird sich letzten Endes auszahlen.

C) Persönliche und moralische Prinzipien: Persönlich akzeptierte moralische und ethische Prinzipien bilden die Richtschnur für Urteile. Konflikte werden nach rationalem Abwägen der zugrundeliegenden Prinzipien entschieden.

5. Im Konfliktfalle wird den rational begründeten Gesetzen vor individuellen Bedürfnissen der Vorrang gegeben, da die Erhaltung des sozialen Ganzen und die Einhaltung allgemeiner sozialer Vereinbarungen aus grundsätzlichen Erwägungen für wichtiger gehalten werden.
6. Die persönlichen ethischen Ideale und Prinzipien, denen universeller Charakter zugesprochen wird, bestimmen die Entscheidungen, u.U. auch unabhängig von den Reaktionen der unmittelbaren Umwelt. Diese persönlichen Prinzipien können u.U. auch in Gegensatz zu bestehenden Gesetzen geraten, werden aber im Zweifelsfall - bei aller Beachtung der Bedeutung von Gesetzen - über diese gestellt.

Beispielsweise könnten sich die Antworten auf das vorhin gestellte Problem auf folgende Überzeugungen stützen:

Stufe 1: Der Mann sollte bleiben, wo er ist, andernfalls wird er von den Behörden bestraft.

Stufe 2: Er sollte zu seiner Familie gehen, da er sich zu Tode sorgen würde, wenn er nicht weiß, was den Seinen zugestoßen ist.

Stufe 3: Er sollte gehen, da sich gute Ehemänner um ihre Familien kümmern.

Stufe 4: Er sollte bleiben, weil die Regeln vorschreiben, daß er seinen Posten nicht verlassen darf.

Stufe 5: Er sollte wohl bleiben, da er sich dazu bereiterklärt hat, in einem Notfall einen derartigen Posten einzunehmen, unter besonderen Umständen jedoch könnte er das Verlassen seines Postens rechtfertigen.

Stufe 6: Er sollte bleiben, da er, wenn er seinen Posten verlassen würde, die Sicherheit weniger über die vieler stellen würde, und das ist nicht richtig; die Menschen in seiner Nähe, die in Not sind, gehören ebenfalls zu einer Familie, und er ist ethisch verpflichtet, sich um sie zu kümmern. Wenn er das nicht tun würde, würde er sich vermutlich für den Rest seines Lebens Vorwürfe machen.

Weiters ergab sich "daß die Abfolge der Stufen der moralischen Entwicklung nicht geändert werden kann. Das Fortschreiten durch die einzelnen Stufen geht schrittweise vonstatten, ohne daß einzelne Stufen übersprungen werden...

Schließlich hat sich ergeben, daß mit der Stufenabfolge die natürliche Richtung der Entwicklung festgelegt ist. Wir haben festgestellt, daß die Kinder unserer Untersuchungen niemals auf eine Stufe zurückkehrten, die sie bereits hinter sich gelassen hatten." (Turiel, 1973).

Da auch die kognitive Entwicklung, wie sie von PIAGET beschrieben wurde, ebenfalls Stufen durchläuft, ist es naheliegend zu untersuchen, wie die kognitive Entwicklung mit dem moralischen Bewußtsein zusammenhängt.
Das Ergebnis ist in folgender Tabelle zusammengefaßt:

Erläuterung der Stufen des moralischen Bewußtseins (nach KOHLBERG)

Stufen des moralischen Bewußtseins	Idee des guten u. gerechten Lebens	Sanktionen	Kognitive Vorauss.	Alter
1. Straf- u. Gehorsamkeitsorientierung	Lustmaximierung durch Gehorsam	Strafe (Entzug von physischen Belohnungen)	Anschauliches Denken	Etwa 3-7
2. Nutzen-Orientierung	Lustmaximierung durch Äquivalententausch			
3. Braves-Kind-Orientierung	Konkrete Sittlichkeit befriedigender Interaktionen	Scham (Entzug von Liebe u. sozialer Anerkennung)	Konkret-operationales Denken	Etwa 8-11
4. Orientierung nach Recht und Gesetz	Konkrete Sittlichkeit eines eingelebten Normensystems			
5. Vertragliche Verpflichtungen	staatsbürgerliche Freiheit und öffentl. Wohlfahrt	Schuld (Reaktion d. Gewissens)	Formal-operationales Denken	Etwa ab 11
6. Ethische Prinzipien	moralische Freih.			

"Diese Beziehungen wurden inzwischen auch von einigen Untersuchungen bestätigt. Konkret-logische Denkfähigkeit und Rollenübernahme sind offenbar eine notwendige wenn auch nicht ausreichende Voraussetzung zu einer Weiterentwicklung im moralischen und sozialen Urteilen." (HECKHAUSEN, 1976)

Logische Denkfähigkeit können wir (zumindest hoffen wir) durch MU steigern, also eine notwendige Voraussetzung für die Weiterentwicklung des moralischen Bewußtseins schaffen. Allerdings folgt daraus noch nicht, daß jemand, der moralisch urteilen kann, auch danach handelt.

3. Anwendungsaufgaben

Um logisches Denken zu fördern, stellt man den Schülern Probleme, die sie lösen sollen. Folgende Aufgabe ist einem Studienbrief zur Fachdidaktik des Deutschen Instituts für Fernstudien entnommen:

Beispiel 19:

Drei Herren X, Y, Z haben sich gegenseitig so beleidigt, daß sich jeder mit jedem anderen duellieren will. Ihre Schießkünste werden wie folgt eingestuft:

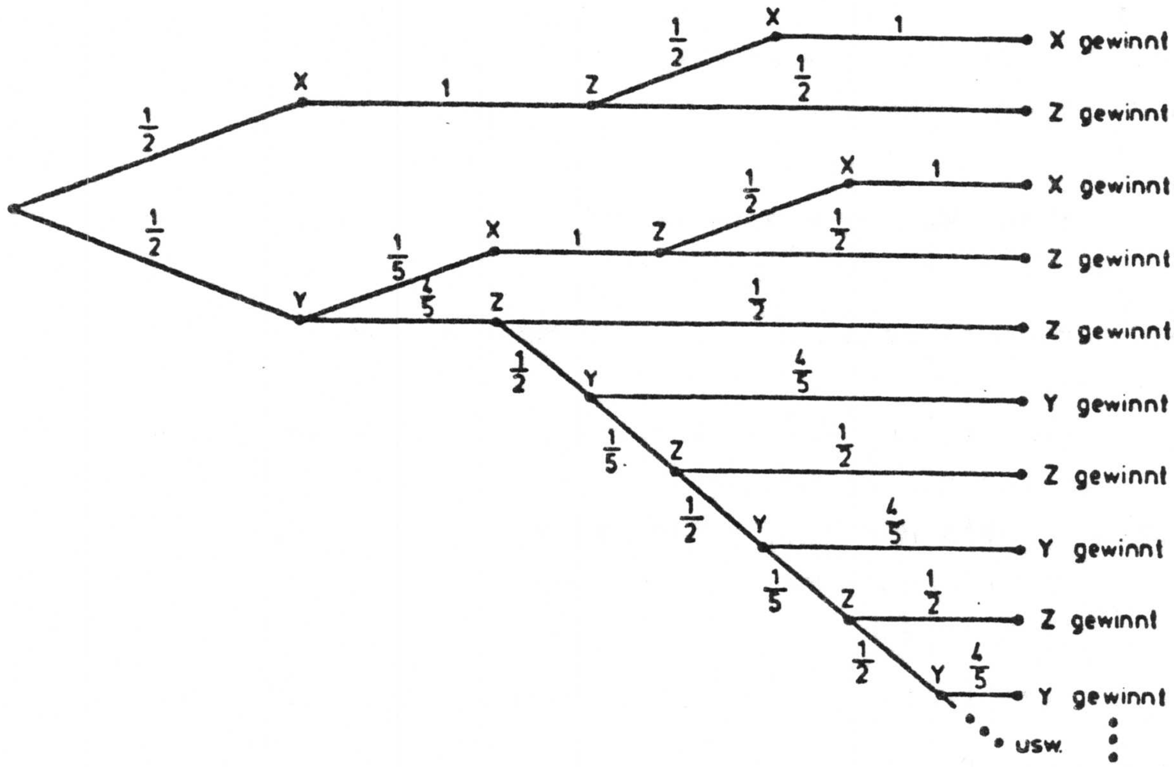
X trifft immer, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit 1,
Y trifft mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$,
Z trifft nur mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

Die Sekundanten einigen sich, ein sogenanntes "Triell" nach folgenden Regeln durchzuführen:
Es wird ausgelost, wer als erster und wer als zweiter schießen darf. In der dadurch festgelegten Reihenfolge wird dann reihum geschossen, bis nur noch einer übrig bleibt. Dem Schützen, der gerade an der Reihe ist, ist es jedoch völlig freigestellt, auf wen er schießt.

Was ist nun die beste Strategie für jeden einzelnen:

Solange noch alle drei am Leben sind, schießen X und Y gegenseitig aufeinander, weil sie zunächst ihren jeweiligen stärksten Rivalen ausschalten wollen. Z hingegen schießt in die Luft. Denn gelänge es Z, etwa X zu erschießen, so käme als nächster Y an die Reihe und erschösse Z mit 80%-iger Wahrscheinlichkeit. So aber wartet Z, bis einer der Herren X oder Y ausscheidet, und fängt dann erst selbst mit dem Schießen an. Somit bleibt Z zunächst unberücksichtigt, solange noch alle drei Schützen leben. Erst dann kommt Z ins Spiel.

Das Vorgehen kann in folgendem Baumdiagramm übersichtlich dargestellt werden:



An den Verzweigungspunkten ist der jeweilige Schütze vermerkt. An den Ästen ist die jeweilige (bedingte) Wahrscheinlichkeit angegeben, mit welcher der am rechten Ende vermerkte Schütze als nächster schießen kann, falls zuvor der am linken Ende vermerkte schoß. Überdies bedeuten waagrechte Äste, daß getroffen wird, und schräge Äste, daß das Ziel verfehlt wird, - abgesehen von den beiden Ästen ganz links (Los ziehen).

Obige Frage läßt sich anhand des Baumdiagramms mit Hilfe der Pfadregeln leicht lösen:

$$P(x) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$P(y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \ldots$$

$$= \frac{4}{25} + \frac{1}{10}\cdot\frac{4}{25} + \frac{1}{100}\cdot\frac{4}{25} + \ldots = \frac{4}{25}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\right) = \frac{4}{25}\cdot\frac{10}{9} =$$

$$= \frac{8}{45} = 0{,}18$$

$$P(z) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} + \ldots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5}\cdot\frac{10}{9} =$$

$$= \frac{47}{90} = 0{,}52$$

Das Ergebnis ist verblüffend. Der schlechteste Schütze hat die größte Überlebenschance, sie liegt sogar über 50%. Dies liegt daran, daß aufgrund der Strategien das "Triell" ein zweifaches Duell ist: Z wird erst beim zweiten Duell beteiligt und darf dann als erster schießen.

Und was haben wir uns nun die ganze Zeit überlegt? Was man tun muß, um andere umzubringen. Und das ist nicht das einzige Beispiel dafür. Ich habe ein wenig die Literatur durchgesucht und kann Ihnen weitere anbieten:

ENGEL, A.: Anwendungen der Analysis zur Konstruktion mathematischer Modelle. In: Der Mathematikunterricht 17 (1971) 3.

Stochastische Prozesse ohne Gedächtnis (Exponentialverteilung): Lebensdauer eines Schiffes im verminten Meer.

Sich gegenseitig behinderndes Wachstum zweier Größen (Differentialgleichungen): Panzerschlacht.

KOSHY, T.: Finite Mathematics and Calculus with Applications. Santa Monica, 1979.

Spieltheorie: Militärische Schlacht im 2. Weltkrieg.

LEHMANN, E.: Matrizenrechnung. München, 1975.

Inverse Matrix: Luftkampf.

WETZEL, H.: Einige Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Militärwesen. In: Mathematik in der Schule 11 (1973), 12 (1974).

Sehen Sie, das ist ein anderer Gesichtspunkt der Mathematik. Mathematik ist eben nicht" nur eine logische Spielerei des Geistes und könne halt zufällig zur Lösung realer Probleme herangezogen werden. In Wirklichkeit hat sich die Mathematik fast immer anhand konkreter Probleme (vor allem der Naturwissenschaften) entwickelt. Ergebnisse der modernen Mathematik werden derart massiv in Industrie und Wirtschaft, Sozialwissenschaften und Politik verwendet, daß ein Mathematiker eigentlich ein ziemlich ausgeprägtes politisches Verantwortungsgefühl haben sollte. Dieses Verantwortungsgefühl könnte ihn aber dazu verleiten, die konkreten Anwendungen der heutigen Mathematik schlechtzuheißen. Nicht zuletzt in der modernen Kriegsführung, beim Bau moderner Waffen, beim Ausbau der umfassenden Kontrolle der Bevölkerung mittels EDV durch den Staat und bei soziologischen und ökonomischen Rechtfertigungstheorien unserer Gesellschaftsordnung spielt Mathematik eine wichtige Rolle" (aus dem Studienführer für Physik und Mathematik).

So schreibt auch OBERSCHELP (1982): "Die Mathematiker wissen sehr wohl, daß die Praxis-Relevanz der Mathematik durch die Geschichte ständig demonstriert wurde und ständig weiter demonstriert wird." Man denke etwa an das Monte-Carlo-Verfahren, das bei der Herstellung der Atombombe benötigt und entwickelt wurde, oder an die lineare Optimierung, wobei "die immer komplexer und umfangreicher werdenden Planungsaufgaben im amerikanischen Militärbereich den Anstoß" gaben. (SCHLÖGLMANN, 1983). Es wäre daher interessant einmal zu überlegen, welche Mathematik wir heute hätten, wenn die Impulse zur Weiterentwicklung von dem Problem der friedlichen Beilegung von Konflikten als von den Militärs gekommen wären.

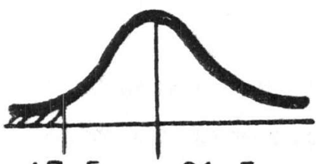
Zur Anwendung von Mathematik steht in den didaktischen Grundsätzen: "Bei der Einführung eines neuen Stoffgebietes sind als Ausgangspunkte nach Möglichkeit Probleme aus anderen Wissenschaften oder aus dem täglichen Leben zu wählen. Im Anschluß an motivierende Beispiele ist eine Formalisierung oder Exaktifizierung in Form der zu behandelnden Definitionen und Lehrsätze durchzuführen. Sodann wird, wenn dies altersgemäß möglich ist, ein Beweis des Satzes erfolgen. Schließlich ist die Behandlung eines bestimmten Lehrstoffgebietes durch möglichst zahlreiche und vielfältige Anwendungen und Übungsaufgaben, abzuschließen; dabei sollen, wo immer dies möglich ist, analoge Beweise als Aufgaben gestellt werden. Bei den Anwendungen sind die vielfältigen Querverbindungen zwischen der Mathematik und anderen Wissenschaften, insbesondere der Naturwissenschaften, der Technik, den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften sowie der Philosophie (mathematische Logik) aufzuzeigen. Durch Klarstellung der dabei gemachten Annahmen, insbesondere der Vereinfachungen, sowie allenfalls durch Beispiele, bei denen derselbe Sachverhalt mit Hilfe verschiedener Modelle behandelt wird, sollen die Möglichkeiten, die Schwierigkeiten und die Grenzen der Anwendbarkeit der Mathematik aufgezeigt werden".

Gerade zu den Grenzen der Anwendbarkeit mathematischer Modelle meint OBERSCHELP (1982): "Zumindest in der Oberstufe muß es möglich sein dem Schüler den Unterschied zwischen Mathematik und den Gegenständen des Mathematisierens klarzumachen. Nur wenn man verstanden hat, wo die Mathematik als reine Fachwissenschaft aufhört und wo die Bildung von mathematischen Modellen in anderen Fachwissenschaften - etwa den Gesellschaftswissenschaften - beginnt, kann man beurteilen, daß es zwei Dinge sind, ob man fälschlich die Objektivität der Mathematik oder ihrer Begriffe in Frage stellt, indem man hier eine gesellschaftliche Abhängigkeiten behauptet, die prinzipiell nicht besteht, oder ob man die Adäquatheit eines mathematischen Ansatzes in einer Anwendungssituation bezweifelt oder gar die Verfolgung von Strategien aus politisch-ethischen Gründen verwirft, welcher mathematischen Techniken sie sich auch immer bedienen mögen. Anders gesagt, ein Bewußtmachen dieser Zusammenhänge schon in der Schule bewahrt uns und die Gesellschaft vor Mißbräuchen, die darin bestehen können, daß man einerseits an sich disponible Anwendungen von Mathematik in der Praxis unter Hinweis auf die Allgemeingültigkeit mathematischer Sätze mit einem falschen Heiligenschein umgibt, und daß man andererseits unbequeme mathematische Sachverhalte unter Hinweis auf die gesellschaftliche Abhängigkeit der Mathematik verharmlost."

Dabei lassen sich sehr relevante gesellschaftliche Probleme mit den in der Oberstufe verwendeten Methoden behandeln. Die folgenden Beispiele wurden von mir im Unterricht gerechnet, aber auch teilweise bei der Reifeprüfung gestellt:

Beispiel:
Im österreichischen Nationalrat sind von 183 Abgeordneten 17 weiblich. Wenn wir annehmen, daß eine Frau die gleiche Chance wie ein Mann hat in den Nationalrat entsendet zu werden, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß 17 oder noch weniger Frauen in den Nationalrat entsendet werden?

Lösung: Binomialverteilung mit $n=183$, $p=0,5$ und $x=0,1,2,\dots,17$
Wegen des zu großen Rechenaufwands wird sie durch die Normalverteilung approximiert:



$u=n.p=91,5$

$\sigma^2=n.p.(1-p)=45,75$

$z=\frac{x-u}{\sigma}=\frac{17,5-91,5}{6,764}=$

$=-10,94$

$\Phi(z)=0$

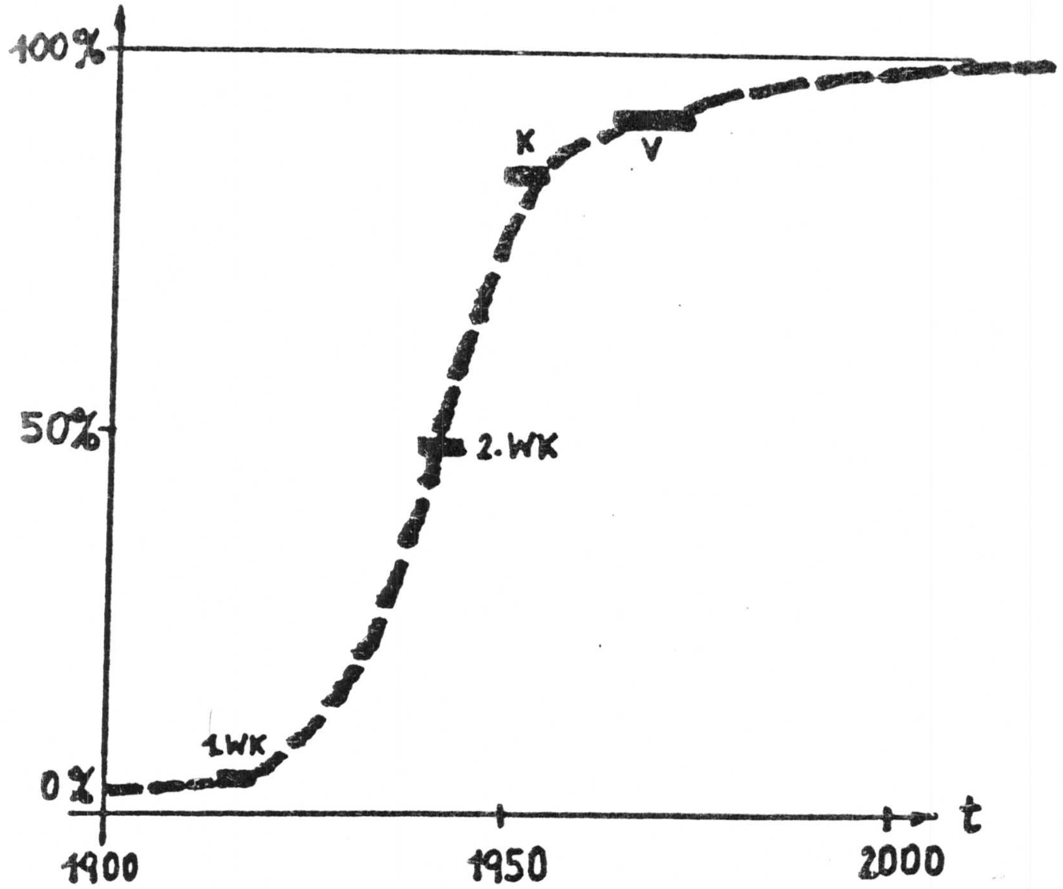
Die Wahrscheinlichkeit dafür ist (im Rahmen der Rechengenauigkeit) 0. Bei einer Zufallsauswahl müßten viel mehr Frauen im Nationalrat vertreten sein. Daraus folgt, daß unsere Annahme "Eine Frau hat die gleiche Chance in den Nationalrat entsendet zu werden" falsch ist. Es liegt eine Diskriminierung der Frauen vor!

Analog: 51 Frauen von 520 Abgeordneten sind im Bundestag der Bundesrepublik Deutschland vertreten.

Beispiel: Verhältnis der getöteten Zivilisten zu getöteten Soldaten in verschiedenen Kriegen

	Zivilisten	Soldaten	Jahr
1. Weltkrieg	5 %	95 %	1914-18
2. Weltkrieg	48 %	52 %	1939-45
Korea	84 %	16 %	1950-53
Vietnam	92 %	8 %	1964-73

Wie wird das Verhältnis im Jahr 2000 aussehen?
Um einen Überblick über die Entwicklung zu bekommen werden die Werte graphisch dargestellt und durch eine Kurve verbunden.



Wenn ich dieses Beispiel im MU bespreche, dann habe ich mit den Schülern vor nicht allzulanger Zeit die "logistische Funktion"

$x \mapsto \frac{e^{cx}}{1+e^{cx}}$ besprochen

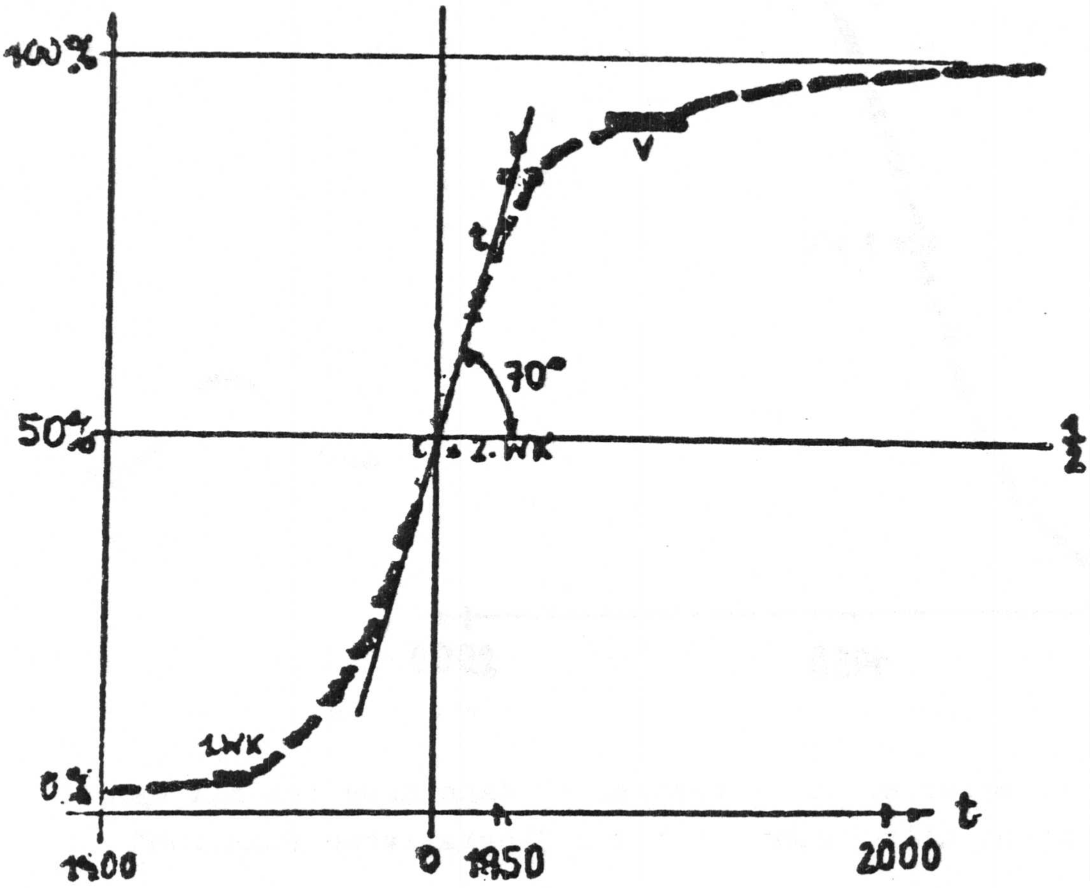
(Eine Anwendung in der Statistik, die allerdings nicht für den MU geeignet ist, findet man in HANISCH, 1981).

Für diese Funktion gilt:

$f':x \mapsto c.\ \frac{e^{cx}}{(1+e^{cx})^2}$ und

x	y	y'
0	0,5	0,25
∞	1	0
$-\infty$	0	0

Da die Graphen der logistischen Funktion dem Graphen der Kurve unseres Problems ähneln, kann man versuchen das Koordinatensystem und den Maßstab so zu ändern, daß diese mit obiger Funktionstabelle übereinstimmen. Wir erhalten dadurch das folgende Schaubild:



Bestimmen wir noch den Anstieg der Tangente in $(0/\frac{1}{2})$, so können wir c berechnen:

$$k = \frac{c}{4} = 2,75 \Rightarrow \quad c = 10$$

Eine Kontrollberechnung zeigt, daß die logistische Funktion gut zu den gegebenen Daten paßt:

x	y
- 0,26	0,07
0	0,50
0,10	0,73
0,27	0,94

Und für das Jahr 2000 ist x = 0,6 und y = 1,00, was einen Vorgeschmack auf einen Atomkrieg gibt.

Beispiel:

Fehlerwahrscheinlichkeiten verschiedener Verhütungsmethoden

Pille	2%
Spirale	2%
Pessar	10%
Schaumzäpfchen	10%
Kondom	10%
Zeitwahl (bei Mädchen unter 20)	20%
Coitus interruptus	20%

Diese Werte wurden von Doz. Rockenschaub dem Verfasser mitgeteilt und sind gerundete Mittelwerte aus verschiedenen Untersuchungen. Dabei versteht man unter der Fehlerwahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit, daß eine Frau trotz der genannten Verhütungsmethoden innerhalb eines Jahres schwanger wird. Ein Beispiel möge dies näher erläutern. Seien in einer Schulklasse 20 Schüler, die Hälfte davon Mädchen. Angenommen nur fünf Mädchen haben während der 7. und 8. Klasse jeweils einen Freund, mit dem sie Verkehr haben (die Annahme, daß dies bei nur 50 % der Mädchen ab 16 Jahren der Fall ist, ist wesentlich niedriger als die verschiedenen Statistiken aussagen), und sie verwenden etwa die Zeitwahl. Dann werden während dieser Zeit etwa $2.5.0,20 = 2$ Mädchen schwanger. Allerdings könnte dieser Erwartungswert durch eine Kombination verschiedener Verhütungsmethoden verringert werden, etwa durch die zusätzliche Verwendung eines Kondoms bei der Zeitwahl. Da die beiden Verhütungsmethoden in der Wirkung voneinander unabhängig sind, kann der Multiplikationssatz angewendet werden, die beiden Wahrscheinlichkeiten werden miteinander multipliziert:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0,10.0,20 = 0,02$$

Man erhält also etwa die Sicherheit der Spirale oder der Pille.

Trotzdem ist auch dieser Prozentsatz auf die Dauer gesehen noch erschreckend hoch. Denn fragen wir, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, in 25 Jahren trotz Verwendung der Pille oder der Spirale mindestens einmal ungewollt schwanger zu werden, so kann zur Berechnung die Binomialverteilung herangezogen werden, da ein Alternativversuch öfters hintereinander ausgeführt wird.

Hiebei ist $n=25$, $p=0,02$, $x\geq1$. Wir suchen $P(X\geq1)$ und berechnen dies durch die Gegenwahrscheinlichkeit $P(X=0)$:

Nun ist $P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ und daher

$$P(X=0) = \binom{25}{0} . 0,02^0 . 0,98^{25} = 0,603.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher 1 - 0,60 = 40%. Um wieviel größer die Wahrscheinlichkeit bei Verwendung unsicherer Methoden oder gar ohne Empfängnisverhütung ist, kann man leicht analog ausrechnen.

Sie meinen, es gehöre sich nicht, über Verhütungsmethoden zu reden, und schon gar nicht in der Schule und vor allem nicht im MU?!
Ich meine schon, denn abgesehen vom Erlaß über das Unterrichtsprinzip Sexualerziehung gibt es in Österreich ca 30.000 (lt. Angabe von Familienminister Karl) bis 80.000 (lt. Angabe von Doz.Dr. Rockenschaub) Abtreibungen im Jahr. Und diese Zahl zu senken, ist sicher moralisch zu rechtfertigen.

Auch das Problem der Lohnrelation kann hier angeführt werden. Leistet Karajan, wenn er einen Abend dirigiert, etwa soviel wie ein AHS-Lehrer durch fünf Monate hindurch? Leistet ein AHS-Lehrer in den ersten Dienstjahren wirklich nur ein Drittel dessen, was einer in den letzten Dienstjahren leistet u.s.f.

4. Der Reduktionismus

Aus den angeführten Beispielen können Sie ersehen, daß es schon möglich ist, über moralisch relevante Probleme auch im MU zu reden.

Eines dieser Probleme ist das, das bei Verwendung eines mathematischen Modells viele Dinge weggelassen werden, weil man glaubt, daß sie für das Problem unwesentlich sind oder auch, weil man sie mathematisch nicht behandeln kann. Dazu führt GROSSER (o. J.) aus:

"Allgemein: Zentrale Tatsache bei der Anwendung eines formalen Modells ist, daß das reale Geschehen auf eine relativ kleine, überschaubare und handhabbare Zahl von Bestimmungsstücken (diese können auch statistischer Natur sein) reduziert wird; zentral ist das WEGLASSEN aller übrigen Umstände (das sind "fast alle" ... !).

Gerade diese Reduktion bewirkt einerseits, daß uns das Modell etwas nützt, daß wir eventuell sogar eine (Wahrscheinlichkeits-)Aussage über zukünftige Entwicklung machen können, zugleich stellt sie jedoch eine Vernichtung von Realität dar. Ob dieser vernichtete Teil "wesentlich" ist, ist keine Frage der Mathematik oder der jeweiligen Wissenschaft, in der das Modell angewendet wird, sondern eine des Zwecks der angestellten Untersuchung und damit letzten Endes eine Frage des sozialen Kontexts, in dem die Wissenschaft betrieben wird. Und bestimmte Phänomene, (...) hauptsächlich solche, die mit "Leben" oder "Gesellschaft" zu tun haben, sind prinzipiell schwer oder gar nicht mit der Sprache formaler Modelle zu erfassen und fallen daher vorzugsweise der realitätsvernichtenden Wirkung der Anwendung mathematischer Modelle zum Opfer. Insofern also "Deformation" der Realität, wenn die sich mathematischer Modelle bedienenden Naturwissenschaften - allen voran die Physik - als Vorbild für Wissenschaft überhaupt hingestellt werden."

Dabei haben die Naturwissenschaften in der Renaissance dadurch ihren Aufschwung erlebt, daß man sich von den existenziell wichtigen Fragen, wie etwa: "Gibt es einen Gott?" weggewandt hatte, weil man während des Mittelalters erkannte, daß man sie nicht lösen konnte.

Im folgenden einige Beispiele aus den Schulbüchern, die durch ihren Reduktionismus zum Teil schon makaber wirken.

36. Schluß von einer Einheit auf eine Mehrheit

Beispiel A: 1 Arbeiter braucht zum Ausheben eines Grabens $12\frac{1}{2}$ h. Berechne, wie lange 2 Arbeiter für diese Arbeit brauchen!

Überlege: Je mehr Arbeiter tätig sind,
desto weniger Stunden sind zum Ausheben des Grabens erforderlich.

Daher: Indirektes Verhältnis

Ü: $12\frac{1}{2} \approx 12$, $12:2=6$ (2 Arbeiter werden daher etwas mehr als 6 Stunden brauchen).

Anzahl der Arbeiter	Anzahl der Arbeitsstunden
1	$12\frac{1}{2}\ (=\frac{25}{2})$
2	x

$\cdot 2$ (…) $:2$

$x=\frac{25}{2}:2=\frac{25}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}$

2 Arbeiter brauchen zum Ausheben des Grabens $6\frac{1}{4}$ Stunden.

Aufgaben

744. Ein Arbeiter beendet eine Arbeit in 12 Stunden.

Drei Arbeiter beenden diese Arbeit in .... Stunden.

Vier Arbeiter beenden diese Arbeit in .... Stunden.

Bemerkung: Als Voraussetzung gilt, daß alle Arbeiter gleich schnell arbeiten.

747. Ein Maurer braucht zum Aufstellen einer Mauer $22\frac{1}{2}$ Stunden. Berechne, wie lange 2 Maurer hiezu brauchen!

Hier wird der Mensch auf seine Arbeitskraft reduziert. Es wird nicht danach gefragt, wie sich etwa ein Arbeiter fühlt, der 12 1/2 h allein einen Graben aushebt. Ob die Arbeit zu zweit vielleicht weniger eintönig wäre, u.s.f.

Oder:

Beispiel N: Eine Firma erhöht den Stückpreis einer Ware von S 20,— auf S 25,—. Dadurch sinkt der tägliche Absatz von 400 Stück auf 200 Stück.

a) Ermittle die linearen Nachfragefunktionen P und A!

b) Berechne, von welchem Stückpreis ab die Ware unverkäuflich ist!

a) $p = mx + n$

$20 = 400m + n$ $25 = 200m + n$ $-5 = 200m$ $m = -\frac{1}{40}$	$20 = 400\cdot(-\frac{1}{40}) + n$ $n = 30$	$P: p = -\frac{1}{40}x + 30$ $A: x = -40p + 1200$

b) Die Ware ist unverkäuflich, wenn kein Absatz vorliegt, wenn also $x = 0$ gilt. Daraus folgt $p = 30$. Die Ware ist unverkäuflich, wenn der Stückpreis S 30,— oder mehr beträgt.

570. a) Gegeben ist die Nachfragefunktion $P: p = -x + 600$. Von der Betriebskostenfunktion kennt man folgende Angaben:

x	0	1	3	100 Stück/Tag
B(x)	45	50	60	1 000 S/Tag

(1) Ermittle die Betriebskostenfunktion! (2) Berechne, bei welcher täglichen Produktion der größte Gewinn erzielt wird und gib den Stückpreis sowie die Stückkosten an! (3) Berechne, bei welchen Absatzmengen bzw. bei welchen Stückkosten ein Gewinn erzielt wird!

Bei Beispiel N etwa wird die Frage der Arbeitsplätze außer acht gelassen oder auch bei Bespiel 570.
Wichtig ist etwa bei letzterem vor allem der maximale Gewinn.

1.05 (Ernährungsproblem)
Bei einer Expedition soll der Vitaminbedarf der Teilnehmer durch Tabletten gedeckt werden.
Der Mindestbedarf an den Vitaminen A, C, K, der Gehalt einer Tablette der Präparate I und II an diesen Vitaminen in mg sowie der Preis der Präparate ist der Tabelle zu entnehmen:

—	Mindestbedarf	Präparat I	Präparat II
A	20 mg	3	2
C	400 mg	20	15
K	40 mg	1	5
Preis je Tablette		0,30 S	0,60 S

Welche Mengen von beiden Präparaten müssen täglich einem Expeditionsmitglied verabreicht werden, wenn die Kosten möglichst gering sein sollen?

38. Ein Kranker soll täglich höchstens 50 g Fett, höchstens 200 g Kohlehydrate, jedoch mindestens 135 g Eiweiß zu sich nehmen. Es stehen zwei Grundnahrungsmittel A und B zur Verfügung. Die folgende Tabelle gibt den Preis in S je kg an und die Prozentanteile an Fett, Kohlehydrate und Eiweiß:

	Fett	Kohlehydrate	Eiweiß	Preis in S je kg
A	10%	25%	20%	20
B	5%	40%	45%	60

Bei Beipiel 1.05 geht es auch nicht darum, welche Kombination am gesündesten ist (Gefahr der Überdosierung, Problem der Verträglichkeit), sondern was am billigsten ist. Bei Beispiel 38, auf das ich durch GROSSER (o.J.) aufmerksam gemacht wurde - in der neuen Auflage des Lehrbuches ist es nicht mehr enthalten - habe ich die Frage weggelassen. Was glauben Sie, ist bei diesem Beispiel gesucht? (Was ist "wesentlich"?)

a) Bei welcher Zusammensetzung von A und B wird der Kranke am schnellsten genesen?

oder

b) Bei welcher Zusammensetzung von A und B ist die tägliche Verpflegung am billigsten?

5. Grenzen der Anwendbarkeit

Ein anderes Beispiel, das zeigt, was beim Reduzieren passiert, ist das Problem: "Was ist Intelligenz?. Ist sie eine einheitliche, allgemeine Fähigkeit oder setzt sie sich aus einer offenen Vielzahl mehr oder minder spezieller, auf jeden Fall aber voneinander unterscheidbarer Fähigkeiten zusammen?"

Dabei wird die erste Ansicht in erster Linie von Briten (etwa BURT und VERNON), die zweite von Amerikanern (etwa THURSTONE und GUILFORD) vertreten:

Intelligenz wird mittels Intelligenztests gemessen. Will man einen solchen konstruieren, so stellt man eine Vielzahl von Aufgaben, von denen man hofft, daß sie die Intelligenz (von der man aber nicht weiß, was sie ist - respektlos ausgedrückt) messen, zusammen, legt sie möglichst vielen Versuchspersonen vor und untersucht die Ergebnisse mittels ausgeklügelter statistischer Methoden. Die Vertreter der Ansicht 1 suchen dabei alle Aufgaben heraus, die ihre Ansicht bestätigen, und die Vertreter der Ansicht 2 gehen analog vor. Die Aufgaben, die nicht zur Ansicht passen, werden eliminiert. Jetzt wird noch eine Eichung vorgenommen, und wendet man den so erhaltenen Intelligenztest an, so bestätigt er die vorgefaßte Meinung. Stimmen muß er, die statistischen Methoden wurden ja exakt verwendet. Aus dem sich selbst bestätigendem Test werden dann schulpolitische Entschlüsse großer Tragweite gefaßt. Die Anhänger der Ansicht 1 (allgemeine Intelligenz) werden für ein Schulwesen sein, in dem die Kinder gemäß ihrer Begabung in Gymnasien, Realgymnasien, Hauptschule 1. Zug, Hauptschule 2. Zug aufgeteilt werden. (Wenn es stört, daß hier zwischen Gymnasium und Realgymnasium ein Unterschied gemacht wird, möge die Schulwirklichkeit bedenken und überlegen, ob das bißchen mehr an Mathematik und das Geometrische Zeichnen mit dem Erlernen einer neuen Fremdsprache gleichwertig ist). Die Vertreter der Ansicht 2 (Intelligenz = Summe einzelner Begabungen) werden für eine Gesamtschule mit einzelnen Leistungsstufen sein. So werden sowohl die Gegner als auch die Vertreter einer Gesamtschule immer wieder Untersuchungen anführen können, die für sie sprechen, wobei die jeweiligen Argumente höchst wissenschaftlich untermauert werden können.

Ein anderes Problem ist das der Notengebung. Bei der werden bekanntlich Schulleistungen einer fünfstufigen Skala zugeordnet. Mit den so erhaltenen Zahlen, die aber nur Rangskalenniveau haben (d.h. sie sind zwar geordnet, aber eine "4" ist nicht doppelt so schlecht wie eine "2"), wird dann oft gerechnet, als ob sie Intervallskalenniveau hätten. So wird etwa oft das arithmetische Mittel von Schularbeiten berechnet und als Grundlage für die Zeugnisnote genommen. Aber auch die Verteilung der Punkte auf die einzelnen Beispiele einer Schularbeit und dann die Beurteilung, wieviel Punkte ein teilweise gelöstes Beispiel erhält, ist nicht objektivierbar. Darüber aber rede ich mit meinen Schülern und versuche ihnen meine Gedankengänge, die zu einer bestimmten Beurteilung geführt haben, darzulegen. Selbstverständlich bin ich aber auch bereit, im Verlauf einer Argumentation mich besseren Argumenten anzuschließen. Dies ist aber bereits ein Punkt des nächsten Kapitels.

6. Affektive Lehrziele

Ein weiterer Beitrag bei der Heranbildung der Moral leistet die Mathematik bei der Verfolgung affektiver Lehrziele und zwar bei der "rationalen Argumentation" und beim "sozialen Lernen".

a) Rationale Argumentation

Als Merkmale für rationale Argumentation nennt GATZEMAIER (1974):

1) Alle für das Verstehen der Argumentation wichtigen Worte müssen verständlich erläutert werden.
2) Alle Behauptungen müssen begründet werden (Begründungspflicht).
3) Kein von irgendeinem Gesprächspartner vorgebrachtes Argument darf von vornherein, d.h. ohne nähere Prüfung und Begründung ausgeschlossen werden.
4) Das Geben oder Verweigern der Zustimmung darf nur von der logischen Einsicht abhängen.

Wo ließe sich rationale Argumentation in diesem Sinne wohl besser üben als im MU?

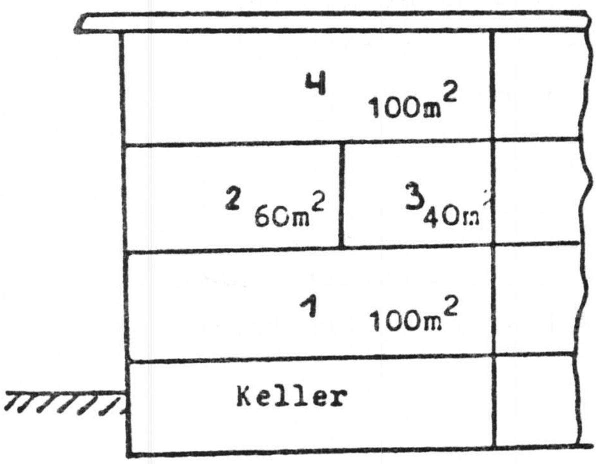
Geht es doch in diesem nicht um "existenzielle" Probleme (Ich werde darauf beim sozialen Lernen zurückkommen).

Ich unterrichte auch im Gymnasium bzw. Realgymnasium für Berufstätige. Zu Beginn des heurigen Sommersemesters habe ich 2 erste Klassen in Mathematik, eine davon als Klassenvorstand übernommen. In dieser wurden nach einer (gruppendynamischen) Schnupperstunde (90 Minuten) die Studierenden ersucht, sich in 4-er Gruppen zusammenzusetzen, da dies für ein zu behandelndes Problem günstig sei und Ihnen dann folgender Text vorgelegt:

Heizkosten-abrechnung

Das Folgende ist eine Übung, bei der Sie trainieren zu argumentieren und sich zu entscheiden, und dabei auch etwas Mathematik üben.
Ihre Gruppe soll mit Einstimmigkeit beschließen. Das bedeutet, daß die Aufteilung der Heizkosten des umseitig beschriebenen Gebäudes einstimmig festgelegt werden muß. Einstimmigkeit ist schwer zu erzielen. Deshalb wird nicht jede Lösung jeden einzelnen voll befriedigen. Versuchen Sie trotzdem, die Aufteilung so vorzunehmen, daß alle einigermaßen damit einverstanden sein können. Hier einige Richtlinien:

1) Vermeiden Sie, Ihre persönliche Entscheidung den anderen aufzuzwingen, argumentieren Sie mit Logik.
2) Vermeiden Sie nachzugeben, bloß um Einstimmigkeit zu erzielen oder Konflikten auszuweichen. Unterstützen Sie nur dann andere Ansichten, wenn Sie mit Ihren wenigstens teilweise übereinstimmen.
3) Vermeiden Sie Konfliktlösungstechniken, wie Mehrheitswahl, Mittelwertberechnungen oder Kuhhandel (wenn Du mir, dann ich Dir).
4) Betrachten Sie abweichende Meinungen eher als einen nützlichen Beitrag, statt sie als störend zu empfinden.



Öl-Zentralheizung mit zentraler Warmwasserversorgung.
Ölkosten im Jahr 1983:

S 60 000,-

Wie sind diese Kosten gerecht auf folgende 4 Parteien aufzuteilen?:

1: Familie Huber: 2 Personen, beide berufstätig, bewohnt das Parterre. Dieses ist trotz Keller etwas kälter als der 1.Stock.

2: Helge Müller: 1 Person, berufstätig, praktisch nie da und klagt über Isolationsmängel (Nordseite!), hat die Heizung fast abgedreht.

3: Ulli Wagner: 1 Person, berufstätig mit inoffiziellem, das heißt nicht angemeldeten Partner.

4: Familie Schmid: Mann berufstätig, Frau zu Hause, 2 Kinder im Alter von 6 Monaten und 3 Jahren. Sie bewohnen den letzten Stock unter einem Flachdach und klagen ebenfalls unter Isolationsmängeln.

Anschließend haben die einzelnen Gruppen das Problem bearbeitet und dann ihre Ergebnisse präsentiert. Groß war das Erstaunen, als ich auf die Frage: "Was ist denn das richtige Ergebnis?" antwortete: "Jedes ist richtig. Wenn alle Gruppenmitglieder mit der Kostenaufteilung zufrieden sind, ist die Aufgabe richtig gelöst." Und was hat das für den MU gebracht? Prozentrechnen, Verhältnisse, Schlußrechnen u.s.f. Und noch etwas konnte man bemerken: In jedem ersten Semester scheiden relativ viele Studierende wieder aus. Bis Anfang Mai waren es 6, die aus dieser Klasse ausgetreten waren. In der Parallelklasse hingegen, die auch denselben Englischlehrer hatte (Englisch und Mathematik sind die Fächer, die den Studierenden die größeren Schwierigkeiten bereiten (HANISCH, 1980)), 13 Studierende. Es könnte dieses Experiment mit ein Grund dafür gewesen sein, daß in dieser Klasse nur etwa halb so viel Studierende die Schule verlassen haben als in der Parallelklasse.

b) Soziales Lernen.

Dieses hängt eng mit der rationalen Argumentation zusammen. Nach SCHREINER (1974) sind es zwei Hauptziele, die sich weiter untergliedern lassen und zwar:

1. Ziel: Lernen, mit anderen zusammen effizient zu arbeiten

   a) Einstellung und Fähigkeit, Mehr-Wissen und individuell erarbeitete Problemlösungen, Hypothesen Einfälle, Sichtweisen u.s.w. anderen vorbehaltslos und verständlich mitzuteilen

   b) Relative Selbständigkeit bei der Lösung von Problemen; nicht einfach nachmachen, was ein anderer macht; bereit sein, auf den anderen einzugehen

   c) Gedankliche Disziplin (Konzentration auf das gemeinsame Ziel)

2. Ziel: Lernen, Emotionen bei sich selbst und anderen wahrzunehmen, zu verstehen und mit ihnen umzugehen

   a) Fähigkeit, anderen zuzuhören

   b) Fähigkeit, Gefühle, d.h. Vermutungen (Intuitionen) zu artikulieren

   c) Fähigkeit, Kritik zu vertragen

   d) Frustationstoleranz

ZECH (1977) meint dazu:

"Die Möglichkeit der Mathematik, hier einen Beitrag zu leisten, besteht wohl vor allem darin, daß mathematische Kooperation und Kommunikation sich auf einer relativ emotionslosen Basis abspielen, da es hier meist nicht um "existentielle" Probleme geht:

- Relative Selbständigkeit ist in der Mathematik eher denkbar, da Mathematik letztlich nur auf Selbstkontrolle angewiesen ist.

- Gedankliche Disziplin erscheint in der Mathematik eher möglich, da der Kontext meist stärker begrenzt ist als in anderen Fächern.
- Man kann besser einander zuhören, wenn man selbst weniger betroffen ist.

- Man kann eher Kritik vertragen, wenn sie stärker von der "Sache" kommt.

Es könnte sein, daß die Mathematik aus den genannten Gründen eine geeignete "Spielwiese" sozialer Verhaltensweisen ist, von der aus man sich dann eher auf andere Gebiete "wagen" kann."

Schon das Heizkostenbeispiel zeigt wie man diese Lehrziele unterrichten kann. Aber auch das Lösen mathematischer Probleme (siehe HANISCH, 1982) kann dazu verwendet werden. So kann etwa das Problem gestellt werden $\sum_{i=1}^{n} i$ zu berechnen. Bislang war unter meinen Schülern noch kein zweiter GAUSS.
Aber trotzdem wurden immer wieder Möglichkeiten entdeckt sich die Arbeit des Zusammenzählens zu erleichtern.
Anspruchsvoller ist hingegen Σi^2, was sich auf eine "umgekehrte Kurvendiskussion" zurückführen läßt (HANISCH, 1984).
Ein weiteres Beispiel für Mathematik als Spielwiese sozialer Verhaltensweisen ist das Erweitern von Gesetzen. Wenn ich die Erweiterung der Zahlenbereiche bespreche, von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$, von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Q}$, von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$, von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ lernt der Schüler, daß man versuchen kann, Gesetze zu erweitern, daß es aber ein kontrolliertes Erweitern sein muß, weil man überprüfen muß, ob eine Regel nach wie vor gilt und daß das nicht unbedingt sein muß, denn in $\mathbb{C}$ gibt es etwa keine Ordnungsrelation, wie größer und kleiner! Aber auch $a^k : a^l = a^{k-l}$ hängt stark vom verwendeten Zahlbereich für k und l ab, denn für:

1) $k,l \in \mathbb{N} \Rightarrow k > l$
2) $k,l \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \neq 0$
3) $k,l \in \mathbb{Q} \Rightarrow a > 0$
4) $k,l \in \mathbb{C}$ Formel falsch, da der Wurzelbegriff nicht eindeutig definiert ist.

Dieses kontrollierte Erweitern ist aber auch für das Leben sehr wichtig. Oft scheitern Partnerbeziehungen, weil der eine der beiden Partner seine Verhaltens- und Kommunikationsregeln auf den anderen überträgt, ohne zu prüfen, ob der andere auch dasselbe darunter versteht.
Ein Beispiel dafür: Einer der Partner kommt nach Hause und sagt: "Heute hab' ich einen sehr anstrengenden Tag gehabt!" Was meinen Sie, will er:

a) daß man sich um ihn kümmert oder
b) daß man ihn in Ruhe läßt?

Einen wesentlichen Beitrag zum sozialen Lernen bietet auch das Hinterfragen von angewandten Aufgaben. So bin ich nicht abgeneigt das Beispiel von den 3 Schießern von den Schülern rechnen zu lassen. Wenn dann darüber diskutiert wird, wie etwa: "Wer wird wohl auf die Idee mit dem Schießen gekommen sein?" "Und wie groß sind seine Überlebenschancen?!", kann man dadurch zur Einsicht gelangen, daß gewaltfreie Methoden zur Bewältigung von Konflikten doch alle Mal anderen vorzuziehen sind.

Auch das Hinterfragen und Begründen von Annahmen, die der Schüler getroffen hat, kann an dieser Stelle erwähnt werden.
Folgende beiden Beispiele verdanke ich Doz.Dr. BÜRGER:

Beispiel:
Aus folgenden Beispielen könnte man vermuten, daß folgender Satz gilt: Teilt eine natürliche Zahl a das Produkt zweier natürlicher Zahlen b und c, so ist a ein Teiler von b oder a ein Teiler von c.
So gilt beispielsweise:
2 teilt 20 = 4.5 und 2 ist Teiler von 4;
3 teilt 24 = 4.6 und 3 ist Teiler von 6;
4 teilt 24 = 3.8 und 4 ist Teiler von 8;

Die obige Vermutung könnte noch an unendlich vielen Zahlen bestätigt werden (sie gilt sicher immer dann, wenn a eine Primzahl ist)
Das folgende Besispiel zeigt jedoch, daß sie nicht für alle natürlichen Zahlen gilt:
8 teilt 24 = 4.6, aber 8 teilt weder 4 noch 6.

Beispiel:
Man gebe alle natürlichen Zahlen an, für die die Ungleichung $x^2 - 1000x+5000 > 0$ gilt. Man rechnet leicht nach, daß diese Ungleichung für die Zahlen 1,2,3,4,5 erfüllt ist, für die Zahlen 6,7,8... nicht. Man vermutet deshalb, daß sie nur für die Zahlen 1,2,3,4,5 erfüllt ist. Dies ist jedoch falsch. So ist die Ungleichung auch für die Zahl 1000 gültig.

Dabei sollte der Schüler darauf aufmerksam gemacht werden, daß das Verallgemeinern eine dem Menschen (nicht nur diesem) angeborene Eigenschaft ist, daß das aber auch auf einen Irrweg führen kann. Viele Schülerfehler lassen sich durch dieses Verallgemeinern erklären, wie etwa: $\sqrt{a^2+b^2} = a + b$, weil ja $\sqrt{a^2b^2} = a.b$ richtig ist.

Oder $\frac{\sin ax}{a} = \sin x$, weil ja $\frac{dcbax}{a} = dcbx$ ist u.s.f.

Der Mensch ist eben unvollkommen und muß versuchen seine Unvollkommenheit zu überlisten.(Dies erinnert mich an Münchhausen, der sich auch selbst aus dem Sumpf gezogen haben soll.) Immer gelingt das aber nicht, denn so zeigt das Unvollständigkeitstheorem von GÖDEL (Man kann nicht mit den Mitteln eines Axiomensystems zeigen, daß dieses widerspruchsfrei ist), daß das Gewissen nicht die oberste Richtschnur sein kann, weil man nicht wissen kann, ob man nicht irrt.

7. Computersimulation

Einen ganz anderen Zugang zum Thema Mathematik und Moral hat AXELROD (1984) versucht, und zwar bedient er sich des Monte Carlo Verfahrens (wie Sie wissen, wurde es für die Herstellung der Atombombe entwickelt) und verwendete dazu einen Computer.
Gerade die, die einen eher pragmatischen Standpunkt vertreten, werden die folgenden Ausführungen interessieren.

Ausgangspunkt ist folgendes Problem. Angenommen Sie besitzen große Mengen irgendeines Gutes (z.B. Geld) und möchten dafür eine bestimmte Menge eines anderen Gutes (Lebensmittel, Gold etc.)erwerben. Daher einigen Sie sich mit den einzigen Händler für dieses Gut, den sie kennen, auf ein für beide befriedigendes Tauschgeschäft. Aus irgendeinem Grund muß der Tauschhandel im geheimen stattfinden. Sie kommen überein, daß jeder von Ihnen einmal im Monat sein Gut an einem vereinbarten Ort deponiert und das Gut des anderen aus dessen Versteck abholt. Nehmen wir weiter an Sie beide seien grenzenlose Egoisten und hätten nur den eigenen Vorteil im Auge. (Beachten Sie den Reduktionismus, der in diesem Modell steckt!)

Was wäre das vernünftigste Vorgehen für Sie?

Das hängt von zwei Dingen ab :

1. Was für einen Vorteil ziehen Sie, wenn Sie a) mogeln
   b) kooperieren?
2. Was für einen Vorteil zieht der Händler, wenn er a) mogelt,
   b) kooperiert und wie wird er auf Ihr Verhalten bei einem weiteren Austausch reagieren?

Treffen wir daher für unser Problem weitere Zusatzannahmen (Es wird zusätzlich reduziert!):

1) Beiderseitiges Mogeln bringt 0 Punkte, da ja - bis auf einen Spaziergang - keiner einen Verlust oder Gewinn hat.
2) Beiderseitiges Kooperieren soll für jeden der beiden Beteiligten 2 Punkte einbringen. Das entspricht dem Gewinn, der bei diesem Tauschgeschäft jeweils erzielt wird.
3) Einseitiges Kooperieren, wenn der andere mogelt, soll für den Kooperationswilligen einen Verlust von 1 Punkt eintragen, während der Mogler 4 Punkte erhalten soll.

Das Ganze ist in folgender Matrix zusammengefaßt:

		Händler	
		kooperiert	mogelt
Sie	kooperieren	(2,2)	(−1,4)
	mogeln	(4,−1)	(0,0)

(x, y) heißt, daß Sie x und der Händler y Punkte bekommen.

Um negative Zahlen zu vermeiden zählt man jeweils 1 dazu.
Dadurch erhalten wir folgende Nutzen-Matrix:

		Spieler *B*	
		kooperiert	mogelt
Spieler *A*	kooperiert	(3,3)	(0,5)
	mogelt	(5,0)	(1,1)

Auf Grund unserer Annahmen ist es für beide Spieler zusammen am besten, wenn sie kooperieren
Sei L der Lohn für beiderseitiges Kooperieren, S die Strafe, für beiderseitiges Mogeln, V die Versuchung zu mogeln und H erhalte der, der hereingelegt wurde.
Dann gilt:

(1) $V > L > S > H$ und

(2) $\frac{V+H}{2} < L$

(1) besagt für jeden Spieler: "Es ist besser für mich zu mogeln, egal was der andere tut."

(2) hingegen bedeutet, daß durchgehendes Kooperieren besser ist als ein Wechselspiel von Kooperieren - Mogeln, Mogeln-Kooperieren usf.

Da es kein bestes Vorgehen gibt - das Ergebnis hängt ja immer von der Strategie des Gegenspielers ab - kam AXELROD auf folgende Idee: Er ersuchte mehrere prominente Spieltheoretiker Computerprogramme zu entwerfen, die auf das K (für Kooperation) oder M (für Mogeln) eines anderen Spieler mit K oder M antworteten und zusätzlich noch das Verhalten dieses Spielers bei früheren Begegnungen berücksichtigten. Sieger sollte das Programm sein, das in einer Serie von Spielen die meisten Punkte erhalten hat. Von den 14 eingesandten Programmen gewann das kürzeste. Es stammte von RAPOPORT, einem Psycholcgen an der Universität in Toronto. Er nannte es TIT FOR TAT ("Wie du mir, so ich dir").

Es war sehr einfach und arbeitete nach folgender Strategie:
Am Anfang kooperierte es und danach tat es stets das, was der Gegenspieler im Zug davor getan hatte. AXELROD analysierte das Ergebnis und fand heraus, daß es die zwei Eigenschaften: kooperationsbereit("=nett") und "versöhnlich" waren, die diesem Programmm zum Sieg verholfen hatten. Um noch bessere Strategien zu entdecken, inserierte AXELROD in Computerzeitschriften und schickte jedem Interessenten eine detaillierte Analyse des ersten Turniers, wobei jeder wußte, daß auch die anderen Teilnehmer wußten, daß jeder wußte,....
Insgesamt gingen 62 Vorschläge aus 6 Ländern ein und Sieger dieses neuen Turniers war wieder TIT FOR TAT. Wieso kam das?
AXELROD meint dazu:
"Was sich abgespielt hat, war offenbar eine interessante Interaktion zwischen zwei Gruppen von Leuten, die verschiedene Lehren aus dem Ergebnis der ersten Runde gezogen hatten, Die einen beherzigen den Grundsatz: "Seid nett und versöhnlich." Die zweiten dagegen spekulierten: "Wenn die anderen allzu nett und versöhnlich werden, lohnt sich der Versuch das auszunutzen." Die Leute, die Grundsatz 1 befolgten, hatten in der zweiten Runde unter denen zu leiden, die sich an Grundsatz 2 hielten."
Das sieht man auch daran, daß unter den ersten 15 bis auf eine lauter nette "Strategien" waren. Und genau so, nur umgekehrt war es auf den letzten 15 Plätzen. Interessant war auch, das bei der Analyse sich eine weitere Eigenschaft als bedeutungsvoll herausstellte, nämlich provozierbar zu sein, d.h. schnell böse zu werden und zurückzuschlagen. Schließlich hatte AXELROD noch eine geniale Idee: Er erfand das "ökologische Turnier."
Dabei ging es darum, daß er eine Serie von Spielen durchführte, wobei das Ergebnis des jeweils vorhergegangenenen die Spielpartner des nöchsten Spiels bestimmte. Das ist so zu verstehen:
Je nach der Punktezahl, die so ein Spiel erhalten hat, wird es im nächsten Spiel öfter oder weniger oft vorhanden sein. Deutet man diese Punkte als Nachkommen, so kann man studieren, wie sich die Umgebung unter dem Einfluß der anderen Programme ändert.
Und wie sich schon aus dem Vorherigen vermuten läßt, schnitt wieder TIT FOR TAT weitaus am besten ab. AXELROD analysierte das so:

"TIT FOR TAT gewann das Turnier nicht, indem es den anderen Spieler schlug, sondern indem es ihn zu einem Verhalten ermunterte, das ihnen beiden zum Vorteil gereichte. TIT FOR TAT hat mit solcher Beharrlichkeit für beide Seiten lohnende Ergebnisse herbeigeführt, daß es schließlich eine höhere Gesamtpunktzahl erreichte als alle anderen Strategien im Turnier."
Er folgert daraus: Man muß demnach (außer in einer Nullsummen-Welt) nicht besser sein als der andere Spieler, um selbst gut dazustehen. Das gilt insbesondere für den Austausch zwischen vielen unterschiedlichen Spielern. Sie können ruhig zulassen, daß jeder ihrer Mitspieler genauso gut abschneidet wie Sie oder sogar etwas besser, solange Sie selbst nur auf Ihre Kosten kommen. Es hat absolut keinen Zweck, neidisch auf den Erfolg des anderen zu sein."
Ist der Gegner allerdings unzugänglich, so wäre "IMMER M" natürlich die bessere Strategie und daraus folgert AXELROD auch:

"Was allzu kompliziert ist, wirkt oft völlig chaotisch. Wenn Sie eine Strategie verfolgen, die willkürlich scheint, dann werden die anderen Sie für unbeeinflußbar halten. Wenn Sie aber unbeeinflußbar sind, gibt es auch keinen Grund mehr, mit Ihnen zu kooperieren. So kompliziert zu sein, daß keiner Sie mehr versteht, ist also sehr gefährlich."

Es sind daher vier Eigenschaften, die den Erfolg einer Strategie ausmachen:
1. Nett
2. Versöhnlich
3. Provozierbar
4. Durchschaubar

Bei dem ökologischen Turnier konnte man auch klären, ob sich einige wenige nette Strategien unter vielen "unnetten" durchsetzen können. Ja, sie tun es. Und daraus folgt, daß es umgekehrt selbstverständlich nicht geht. Unter vielen kooperativen Strategien haben einige wenige nicht kooperationswillige keine Chance, HOFSTADTER (1983) dessen Artikel hier im wesentlichen gefolgt wurde, meint dazu:

"Das Wunderbare daran ist, daß es keine Rolle spielt, mit was für Einheiten man es zu tun hat. Das können Bakterien, kleine Tiere, große Tiere oder Nationen sein. Es bedarf keiner "reflektiven Vernunft"; ja man könnte TIT FOR TAT wohl eher als "reflexiv" denn als "reflektiv" bezeichnen: Der Kniesehnenreflex ist auch nicht viel primitiver.
Leuten, die meinen, moralisches Verhalten lasse sich nur durch Androhen einer gräßlichen Strafe im Jenseits (der Hölle zum Beispiel) oder durch die tröstliche Aussicht auf himmlische Belohnung (die ewige Seligkeit) erzwingen, sollten die Ergebnisse dieser Untersuchung zu denken geben."
Oder wie es AXELROD prägnant ausdrückt:
"Wechselseitige Kooperation kann auch ohne zentrale Kontrolle in einer Welt von Egoisten entstehen, wenn sie von einer Gruppe von Einzelwesen ausgeht, die auf Zusammenarbeit setzt".
Vergleichen wir dieses Verhalten mit den Stufen der moralischen Entwicklung nach KOHLBERG (1974), so würde man so ein Verhalten in Stufe 2 einordnen.
Inwieweit kann sich nun moralisches Verhalten an dieser Computersimulation orientieren?
Dabei muß man bedenken, daß einige einschneidende Einschränkungen vorgenommen wurden:
1. Alle Teilnehmer sind Egoisten
2. Es gibt keine k-o-Spiele
3. Durchgehendes Kooperieren ist besser als ein Wechselspiel von Kooperieren - Mogeln, Mogeln-Kooperieren u.s.f.

Jedes Ändern dieser Voraussetzungen kann natürlich auch ein Ändern der Ergebnisse mit sich bringen. Daher dürfen diese Ergebnisse auch nicht auf alle Lebenssituationen übertragen werden. Im Schulbetrieb sind allerdings (2) auf der Lehrerseite (auf der Schülerseite nicht, denn Schüler können durchfallen) und (3) erfüllt. Ich hoffe aber, daß in Ihren Klassen Punkt (1) nicht gilt.
Unterrichten Sie auch Informatik, dann könnten Sie versuchen dieses Problem auch Ihren Schülern zu stellen. Reizvoll wäre es auch schrittweise die verschiedenen Reduktionen zurückzunehmen. Ist dann immer noch TIT FOR TAT die beste Strategie?

Machen Sie aber bitte Ihre Schüler auch darauf aufmerksam, daß die Ergebnisse der Simulation nur eine Entscheidungshilfe sind, wie eigentlich alle Ergebnisse der angewandten Mathematik. Entscheiden muß sich jeder selbst, das kann und soll ihm die Mathematik nicht abnehmen.

8. Zusammenfassung

Lassen wir zum Schluß einen Pädagogen zu Wort kommen:

"Die Schule kann sich nicht darauf beschränken, Kenntnisse und Fertigkeiten zu vermitteln, und die Entwicklung der Fähigkeiten als gottgegebene Nebenwirkung des Unterrichtes erwarten. Für viele beschränkt sich zweifellos die Förderung kognitiver Fähigkeiten auf die vage Hoffnung, daß Lehrer mehr lehren, als sie tatsächlich lehren, und daß die Schüler mehr lernen, als sie scheinbar lernen. Diese Feststellung darf nicht als Vorwurf aufgefaßt werden. Man spricht heute viel von systematischer Intelligenzschulung, vom Lernen-lernen, von der Entfaltung kreativer Fähigkeiten usw. Das ist sicher notwendig und gut so. Nur: Psychologische Theorien, wie man Denken lernt und lehrt, stehen nur in einem sehr begrenzten Maße und in sehr vorläufiger Form zur Verfügung und werden gegenwärtig in der Schule kaum praktiziert.
Ähnliche Probleme ergeben sich, wenn man die Erziehungsfunktion in der Schule analysiert.
Es ist verhältnismäßig einfach Lernziele zu identifizieren, die motivationale Komponenten enthalten und neue Wertorientierungen einschließen: Selbstverantwortlichkeit für das eigene Handeln; Rücksichtnahme auf die Interessen anderer; Mitgefühl und Hilfsbereitschaft für Schwächere usw.; es ist wesentlich schwieriger, die Wirksamkeit der Schule bei der Erreichung solcher Lernziele exakt zu bestimmen; es ist beim gegenwärtigen psychologischen Theorienstand jedoch fast unmöglich, wissenschaftlich fundierte und praxisrelevante Programme für die Vermittlung emotionaler Lernziele zu entwerfen. Zwar gibt es eine Reihe interessanter

und fruchtbar erscheinender theoretischer Ansätze, doch sind wir von einer pädagogisch befriedigenden Forschungssituation noch weit entfernt." (WEINERT, 1974).
Wenn es mir gelungen ist, mit dieser Arbeit einen kleinen Schritt in diese Richtung zu tun, dann hat sich die Mühe gelohnt.

9. Literatur

AXELROD, R.: The Evolution of Cooperation Basis Books, 1984.

DEUTSCHES INSTITUT FÜR FERNSTUDIEN: Mathematik, Studienbriefe zur Fachdidaktik für Lehrer der Sekundarstufe II, Stochastik MS2, Zugänge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Tübingen, 1979.

GATZEMAIER, M: Grundsätzliche Überlegungen zur rationalen Argumentation. In: Schweizer Schule 5, 1974

GROSSER, M: Die vorbildliche Methode - zur Rolle der Mathematik in den anderen Wissenschaften. In:STRVen Mathematik und Physik an der UNI Wien: Mathematik und Gesellschaft 2. Teil Wien, o.J.

HANISCH, G.: Der zweite Bildungsweg. PhilDiss. der Universität Wien, 1980.

HANISCH, G.: Schrittweise Diskriminanzanalyse für dichotome Variable. In: 10.Österreichischer Mathematiker Kongreß, Innsbruck, 1981.

HANISCH, G.: Kreativitätsförderung im Mathematikunterricht. In : ÖMG Didaktik-Reihe, Heft 9, Wien, 1982.

HANISCH, G.: Similar Sum Derivations. In: Mathematic Teacher, 1984 (in Druck).

HECKHAUSEN, H.: Faktoren des Entwicklungsprozesses. In: Pädagogische Psychologie, Teil 2; Entwicklung und Motivation, Weinheim, 1976.

HOFFMAN, M.L.: Moral Development. In P.H. MUSSEN (Hrsg) Carmichael's Manual of Child Psychology. New York, 1970.

HOFSTADTER, D.R.: Metamagikum. In: Spektrum der Wissenschaften 8, 1983.

KOHLBERG, L.: Zur kognitiven Entwicklung des Kindes. Frankfurt, 1974.

MESCHKOWSKI, H.: Problemgeschichte der Mathematik I, Zürich, 1979.

OBERSCHELP, W.: Zum Verhältnis von Mathematik, Informatik und Philosophie, In: STEINER H.G. (Hrsg.): Mathematik - Philosophie - Bildung. Köon, 1982.

PLATON: Sämtliche Werke, Berlin, o.J.

SCHLÖGELMANN, W.: Anwendungsorientierte Mathematik im Schulunterricht. In: ÖMG Didaktik-Reihe, Heft 10, Wien, 1983.

SCHREINER, G.: Soziales und politisches Lernen. In: Deutsche Schule 1 u. 2, 1974.

STUDIENFÜHRER PHYSIK UND MATHEMATIK der STRVen Physik und Mathematik, Wien, o.J.

TURIEL, E.: Stage transition in moral development. In R.L. EBEL (Hrsg.): Encyclopedia of educational research. New York, 1973.

WEINERT, F.E.: Die Schule als Sozialisationsbedingung. In: Funk-Kolleg Pädagogische Psychologie, Frankfurt, 1974.

ZECH, F.: Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim, 1977.